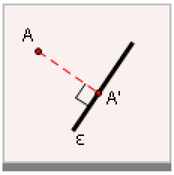
ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1.1 Μετρικές σχέσεις στα τρίγωνα

Θεωρία

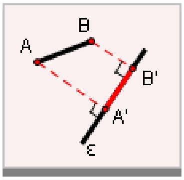
Α Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

Α1 Προβολή σημείου σε ευθεία



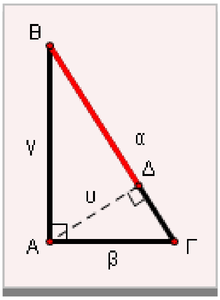
Ορθή προβολή A'
ονομάζεται το ίχνος της κάθετης
που φέρνουμε από ένα σημείο **Α**, πάνω σε μια ευθεία **ε**
(Αν το σημείο βρίσκεται πάνω στην ευθεία, τότε είναι το ίδιο το σημείο.)

Α2 Προβολή τμήματος σε ευθεία



Ορθή προβολή του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ** πάνω στην **ε**
ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα **Α'Β'**
που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές **Α'**, **Β'** των **Α**, **Β**
πάνω στην **ε**

Α3 Θεώρημα 1



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του, ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής πάνω στην υποτείνουσα.

Δηλαδή: $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ ή $\gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta$

$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ ή $\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta$

Απόδειξη

Τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **ΑΒΔ** είναι **όμοια**

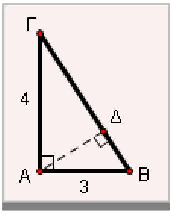
γιατί έχουν δύο γωνίες ίσες: $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$ και $\hat{\Gamma}$: κοινή γωνία.

Συνεπώς, θα ισχύει $\dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{B\Delta}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **ΑΓΔ**, αποδεικνύεται και η σχέση η οποία ισχύει για την άλλη κάθετη, δηλαδή $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 90^o$ και ύψος $A\Delta$, είναι $AB = 3\,cm$ και $A\Gamma = 4cm$

Θα υπολογίσουμε τα **μήκη** των τμημάτων $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$



Από $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ είναι $B\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, άρα $B\Gamma = 5$

Από $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ είναι $4^2 = 5 \cdot \Gamma\Delta$ ή $\Gamma\Delta = \frac{16}{5}$

και από $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ είναι $3^2 = 5 \cdot B\Delta$ ή $B\Delta = \frac{9}{5}$

Σε τρίγωνο με $\hat{A} = 90^o$ και ύψος $A\Delta$ είναι $A\Gamma = 6\,cm$ και $B\Gamma = 10\,cm$

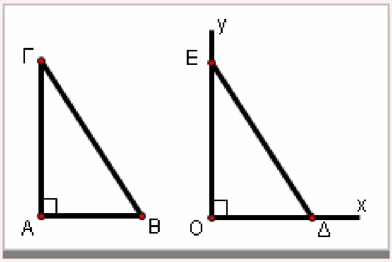
να υπολογίσετε τα **μήκη** των τμημάτων $\Gamma\Delta$ και $B\Delta$

Α6 Θεώρημα 4 - Αντίστροφο του Πυθαγορείου

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά.

Δηλαδή: Αν είναι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, τότε θα είναι $\hat{A} = 90^o$

Απόδειξη



Πάνω στις πλευρές τις **ορθής** γωνίας $x\hat{O}y$

παίρνουμε $O\Delta = AB$ και $OE = A\Gamma$

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα

στο τρίγωνο ΔOE

και είναι $\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2$

$\Leftrightarrow \Delta E^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = B\Gamma^2$

Οπότε $\Delta E = B\Gamma$ και από τα προηγούμενα είναι $O\Delta = AB$ και $OE = A\Gamma$

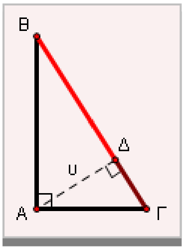
Άρα $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta OE}$ και τελικά $\hat{O} = \hat{A} = 90^o$

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 7cm$, $AB = 4cm$ και $A\Gamma = \sqrt{65}\,cm$

Επειδή $B\Gamma^2 + AB^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65 = \sqrt{65}^2 = A\Gamma^2$, είναι $\hat{B} = 90^o$

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 13\,cm$, $A\Gamma = 8\,cm$ και $AB = 9\,cm$

να ελέγξετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι **ορθογώνιο**.



Α7 Θεώρημα 5

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Δηλαδή: $\mathbf{ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ}$ ή $\mathbf{υ_α{}^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ}$

Απόδειξη

Συγκρίνοντας τα τρίγωνα **ΑΓΔ** και **ΑΒΔ**

διαπιστώνουμε ότι $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2 = 90^o$ και $\hat{Α}_1 = \hat{Γ}$

Οπότε, είναι **όμοια** και συνεπώς $\dfrac{ΑΔ}{ΓΔ} = \dfrac{ΒΔ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΔ^2 = ΓΔ \cdot ΒΔ$

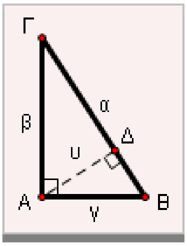
Σε τρίγωνο **ΑΒΓ**, με $\hat{Α} = 90^o$, **ύψος** $ΑΔ = 6\,cm$ και $ΒΔ = 9\,cm$

από $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΓΔ$ είναι $6^2 = 9 \cdot ΓΔ$ ή $ΓΔ = 4\,cm$

Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{Α} = 90^o$ και **ύψος** **ΑΔ**, και με $ΓΔ = 8\,cm$, $ΒΔ = 11\,cm$

να υπολογίσετε το **ΑΔ**

Α8 Εφαρμογή



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{Α} = 90^o$

και ύψος ΑΔ, είναι: $\dfrac{1}{β^2} + \dfrac{1}{γ^2} = \dfrac{1}{υ_α^2}$

Απόδειξη

$$\frac{1}{β^2} + \frac{1}{γ^2} = \frac{1}{ΓΔ \cdot α} + \frac{1}{ΒΔ \cdot α} = \frac{1}{α}\left(\frac{1}{ΓΔ} + \frac{1}{ΒΔ}\right) = \frac{1}{α}\frac{ΒΔ + ΓΔ}{ΓΔ \cdot ΒΔ} = \frac{1}{α}\frac{α}{ΓΔ \cdot ΒΔ} = \frac{1}{ΓΔ \cdot ΒΔ} = \frac{1}{υ_α{}^2}$$

Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{Α} = 90^o$ και **ύψος** **ΑΔ** είναι $ΑΒ = \sqrt{13}\,cm$, $ΑΓ = \sqrt{7}\,cm$

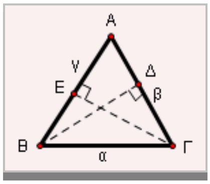
Τότε από $\dfrac{1}{β^2} + \dfrac{1}{γ^2} = \dfrac{1}{υ_α^2}$ είναι $\dfrac{1}{\sqrt{7}^2} + \dfrac{1}{\sqrt{13}^2} = \dfrac{1}{υ_α^2}$ ή $\dfrac{20}{91} = \dfrac{1}{υ_α^2}$ ή $υ_α = \sqrt{\dfrac{91}{20}}$

Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{Α} = 90^o$ και **ύψος** $ΑΔ = 2\sqrt{3}\,cm$, είναι $ΑΓ = 9\,cm$

να υπολογίσετε το **ΑΒ**

Β Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

Β1 Θεώρημα 1 (Οξείας γωνίας)



Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Δηλαδή: $\mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ}$ ή $\mathbf{α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot ΑΔ}$

όπου **ΑΔ** είναι η προβολή της **γ** πάνω στη **β**

ή $\mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΕ}$ ή $\mathbf{α^2 = β^2 + γ^2 - 2γ \cdot ΑΕ}$

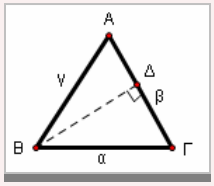
όπου **ΑΕ** είναι η προβολή της **β** πάνω στη **γ**

Απόδειξη

Είναι $\mathbf{ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2}$

$\mathbf{ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2}$

Οπότε $\mathbf{ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2} \Leftrightarrow \mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΓΔ^2}$ (1)



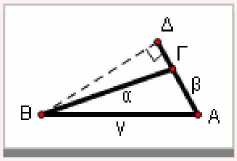
Αν $\hat{\mathbf{Γ}} < \mathbf{90^o}$, το Δ θα είναι μεταξύ Α και Γ

και άρα $\mathbf{ΓΔ = ΑΓ - ΑΔ}$ (2)

Οπότε $\mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΓΔ^2} \quad \mathbf{= ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + (ΑΓ - ΑΔ)^2}$

$\mathbf{= ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ + ΑΔ^2}$

$\mathbf{= ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ}$



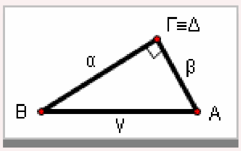
Αν $\hat{\mathbf{Γ}} > \mathbf{90^o}$, το Γ θα είναι μεταξύ των Α και Δ

και άρα $\mathbf{ΓΔ = ΑΔ - ΑΓ}$ (3)

Οπότε $\mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΓΔ^2} \quad \mathbf{= ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + (ΑΔ - ΑΓ)^2}$

$\mathbf{= ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΑΔ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ + ΑΓ^2}$

$\mathbf{= ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ}$



Αν $\hat{\mathbf{Γ}} = \mathbf{90^o}$, το Δ θα συμπέσει με το Γ

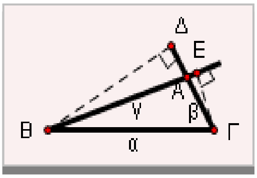
και άρα $\mathbf{ΓΔ = 0}$

Οπότε $\mathbf{ΒΓ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 + ΓΔ^2} \quad \mathbf{= ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΔ}$

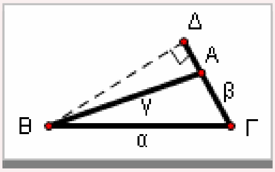
Β2 Θεώρημα 2 (αμβλείας γωνίας)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Δηλαδή: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma \cdot AE$



Απόδειξη



Είναι $B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$

$B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2$

Προσθέτοντας έχουμε $B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$

ή $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$

Επειδή $\hat{A} > 90^o$ το A είναι μεταξύ Δ και Γ και άρα $\Gamma\Delta = A\Gamma + A\Delta$

Οπότε, είναι $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Delta^2 + (A\Gamma + A\Delta)^2$

ή $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Delta^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta + A\Delta^2$

ή $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2A\Gamma \cdot A\Delta$

Β3 Κριτήρια για το είδος τριγώνου

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$, με πλευρές $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$

και **μεγαλύτερη** πλευρά την α

- Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} = 90^o$ και αντίστροφα.
- Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} < 90^o$ και αντίστροφα.
- Αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, τότε $\hat{A} > 90^o$ και αντίστροφα.

Τα πιο πάνω προκύπτουν
από το Πυθαγόρειο και από την γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Έστω το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές $α = 6$, $β = 8$ και $γ = 9$

Είναι $α^2 = 36$, $β^2 = 64$, $γ^2 = 81$

Για το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ισχύει $γ^2 = 81 < α^2 + β^2 = 100$

Επομένως η γωνία $\hat{Γ}$ είναι **οξεία** και επειδή είναι και η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι φανερό ότι το τρίγωνο θα είναι **οξυγώνιο**.

Αν στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $α = 12$, $β = 8$, $γ = 6$ δείξτε ότι είναι **αμβλυγώνιο.**

Έστω το τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = 7\,cm$, $ΑΓ = 5\,cm$ και $ΒΓ = 6\,cm$

Να τονίσουμε ότι η γωνία $\hat{Α} < 90^o$ …αφού $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$

Για την **προβολή** $ΑΕ$ της $ΑΒ$ πάνω στην $ΑΓ$

είναι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΕ$ ή $6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot ΑΕ$ ή $ΑΕ = \dfrac{19}{7}$

Αν στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $ΒΓ = 8\,cm$, $ΑΒ = 9\,cm$ και για την **προβολή** $ΒΔ$ της $ΑΒ$ πάνω στην $ΒΓ$ είναι $ΒΔ = \dfrac{83}{16}\,cm$, να **υπολογίσετε** την πλευρά $ΑΓ$

Β4 Νόμος συνημιτόνων

Τα θεωρήματα οξείας και αμβλείας γωνίας, αποτελούν την γεωμετρική έκφραση του **νόμου συνημιτόνων**.

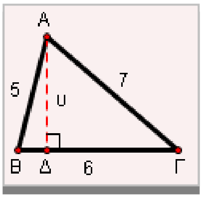
Δηλαδή: $α^2 = β^2 + γ^2 - 2β \cdot γ \cdot συνΑ$

Β5 Ύψος τριγώνου

Για το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι $υ_α = \dfrac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, όπου $τ = \dfrac{1}{2}(α + β + γ)$

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $α = 6$, $β = 7$ και $γ = 5$

Θα υπολογίσουμε το **μήκος** του **ύψους** $υ_α$



Είναι $τ = \dfrac{α + β + γ}{2} = \dfrac{6 + 7 + 5}{2} = 9$

Οπότε $υ_α = \dfrac{2}{6}\sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)} = 2\sqrt{6}$ μ.μ.

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι $α = 5$, $β = 4$ και $γ = 3$

Να υπολογίσετε το **μήκος** του **ύψους** $υ_α$

Γ Θεωρήματα διαμέσων

Γ1 Θεώρημα 1

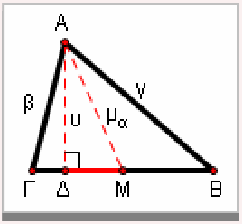
Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Δηλαδή $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$

Απόδειξη

Αν $AB > A\Gamma$, το ίχνος Δ του ύψους θα βρίσκεται μεταξύ των Γ και M

Επίσης $A\hat{M}B > 90^o$ και $A\hat{M}\Gamma < 90^o$



Στο $\overset{\Delta}{AMB}$ εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας και είναι $AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM \cdot M\Delta$

Στο $\overset{\Delta}{AM\Gamma}$ εφαρμόζουμε το θεώρημα οξείας γωνίας και είναι $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 - 2M\Gamma \cdot M\Delta$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων, προκύπτει ότι: $\gamma^2 + \beta^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM \cdot M\Delta + AM^2 + M\Gamma^2 - 2M\Gamma \cdot M\Delta$

$$= 2AM^2 + BM^2 + M\Gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Αν λύσουμε τον παραπάνω τύπο ως προς τη **διάμεσο**, είναι $\mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$

Όμοια είναι $\mu_\beta^2=\frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4}$ και $\mu_\gamma^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$

Γ2 Θεώρημα 2

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Δηλαδή: $AB > A\Gamma$ ή $\gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$, με $\gamma > \beta$

Απόδειξη

Με αφαίρεση των σχέσεων κατά μέλη, προκύπτει

$$\gamma^2 - \beta^2 = AB^2 - A\Gamma^2 = AM^2 + BM^2 + 2BM \cdot M\Delta - AM^2 - M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$$
$$= 2 \cdot 2MB \cdot M\Delta = 2\alpha M\Delta$$

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\gamma = AB = 7cm$, $\beta = A\Gamma = 5cm$ και $\alpha = B\Gamma = 6cm$

Είναι $4\mu_\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7^2 - 6^2 = 112$, άρα $\mu_\alpha = \sqrt{28}$ cm

Έστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 7cm$, $A\Gamma = 5cm$ και $B\Gamma = 6cm$

Να υπολογίσετε το μήκος της **διαμέσου** μ_β

ΕΜΒΑΔΑ

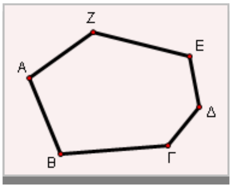
2.1 Περί εμβαδών

Θεωρία

Α Πολυγωνικό χωρίο

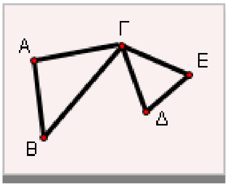
Γνωρίζουμε ότι μια απλή και **κλειστή** πολυγωνική γραμμή, ονομάζεται **πολύγωνο**.

Α1 Πολυγωνικό χωρίο



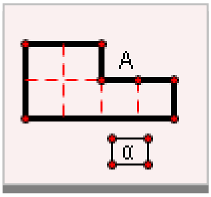
Το σχήμα που αποτελείται από ένα πολύγωνο και τα **εσωτερικά** του σημεία, λέγεται **πολυγωνικό χωρίο**.

Α2 Πολυγωνική επιφάνεια



Ένα σχήμα που αποτελείται από **πεπερασμένο** πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν **κοινά εσωτερικά** σημεία, ονομάζεται **πολυγωνική επιφάνεια**.

Β Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος



Όπως στα ευθύγραμμα τμήματα έτσι και στα σχήματα μέτρηση του χωρίου **Α** λέμε την ***σύγκρισή*** του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο **α** το οποίο επιλέγουμε ως **μονάδα μέτρησης**.

Έτσι, οδηγούμαστε σε μία σχέση της μορφής $\mathbf{A} = \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\alpha}$, με $\mathbf{\kappa} > \mathbf{0}$

Ο θετικός **κ** λέγεται **εμβαδόν** του πολυγωνικού χωρίου **Α** και συμβολίζεται με **(Α)**

Β1 Αξιώματα για το εμβαδόν

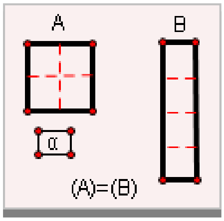
✹ Για το εμβαδόν ισχύουν τα επόμενα αξιώματα.

Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν **ίσα εμβαδά**

το **εμβαδόν** μιας **πολυγωνικής επιφάνειας** ισούται με το **άθροισμα** των εμβαδών των επιμέρους **πολυγωνικών χωρίων** από τα οποία αποτελείται.

✹Το **εμβαδόν** ενός **τετραγώνου** πλευράς **1** μ.μ. είναι **1** τ.μ.

Β2 [Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα]



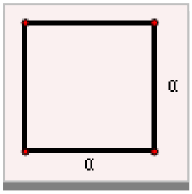
Αναφέραμε προηγουμένως ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι **ίσα**, τότε θα έχουν και **ίσα εμβαδά**.
Το **αντίστροφο** προφανώς και **δεν ισχύει**.
Δύο σχήματα που έχουν το **ίδιο εμβαδόν** λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**.

Άρα λοιπόν
μπορούμε να συγκρίνουμε ως προς το εμβαδόν τους και σχήματα τα οποία δεν είναι ίσα.

Γ Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια, τα εμβαδά των βασικών ευθύγραμμων σχημάτων.

Γ1 Εμβαδόν τετραγώνου

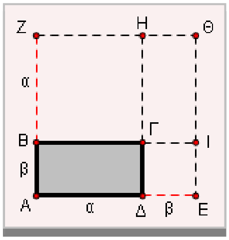


Το εμβαδόν $\mathbf{E}$ ενός τετραγώνου πλευράς $\boldsymbol{\alpha}$ είναι $\mathbf{E}=\boldsymbol{\alpha}^2$

Ένα τετράγωνο με **πλευρά $4\,\text{cm}$** έχει **εμβαδόν $16\,\text{cm}^2$**

Να βρείτε το **εμβαδόν** ενός τετραγώνου με **περίμετρο $12\,\text{cm}$**

Γ2 Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου



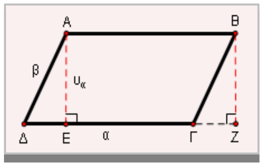
Το εμβαδόν $\mathbf{E}$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Για ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι $\mathbf{E}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$, με $\mathbf{AB}=\boldsymbol{\beta}$ και $\mathbf{A\Delta}=\boldsymbol{\alpha}$.
Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathbf{AB}$ κατά τμήμα $\mathbf{BZ}=\boldsymbol{\alpha}$ και την $\mathbf{A\Delta}$ κατά $\mathbf{\Delta E}=\boldsymbol{\beta}$
Στην συνέχεια, σχηματίζουμε το τετράγωνο $\mathbf{AZ\Theta E}$ το οποίο έχει πλευρά $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$
άρα και $(\mathbf{AZ\Theta E})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^2$
Προεκτείνοντας τώρα τις $\mathbf{B\Gamma}$ και $\mathbf{\Delta\Gamma}$ σχηματίζονται τα τετράγωνα $\mathbf{B\Gamma HZ}$, $\mathbf{\Delta\Gamma IE}$ με πλευρές $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ αντίστοιχα, και το ορθογώνιο $\mathbf{\Gamma H\Theta I}$ το οποίο είναι ίσο με το $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$
Οπότε $(\mathbf{B\Gamma HZ})=\boldsymbol{\alpha}^2$, $(\mathbf{\Delta\Gamma IE})=\boldsymbol{\beta}^2$ και $(\mathbf{\Gamma H\Theta I})=(\mathbf{AB\Gamma\Delta})$
Έχουμε λοιπόν $(\mathbf{AZ\Theta E})=2(\mathbf{AB\Gamma\Delta})+(\mathbf{B\Gamma HZ})+(\mathbf{\Delta\Gamma IE})$
Δηλαδή $2(\mathbf{AB\Gamma\Delta})=(\mathbf{AZ\Theta E})-(\mathbf{B\Gamma HZ})-(\mathbf{\Delta\Gamma IE})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^2-\boldsymbol{\alpha}^2-\boldsymbol{\beta}^2$
οπού μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι $(\mathbf{AB\Gamma\Delta})=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$

Γ3 Εμβαδόν παραλληλογράμμου



Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Για ένα παραλληλόγραμμο διαστάσεων α , β

είναι $\mathbf{E = α \cdot υ_α}$ **ή** $\mathbf{E = β \cdot υ_β}$

Απόδειξη

Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ**

και φέρνουμε το ύψος **ΑΕ** το οποίο αντιστοιχεί στην **ΓΔ**

Από το σημείο **Β** φέρνουμε την **ΒΖ** κάθετη στην προέκταση της **ΓΔ**

Τα τρίγωνα **ΑΔΕ** και **ΒΖΓ** είναι ίσα, οπότε $\mathbf{(ΑΔΕ) = (ΒΖΓ)}$

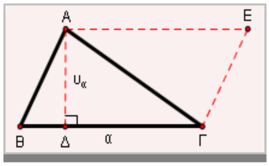
Επειδή το **ΑΒΖΕ** είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

οπότε το εμβαδόν του θα είναι ίσο με $\mathbf{(ΑΒΖΕ) = ΑΒ \cdot ΑΕ}$

Όμως $\mathbf{(ΑΒΓΔ) = (ΑΔΕ) + (ΑΒΓΕ) = (ΒΓΖ) + (ΑΒΓΕ) = (ΑΒΖΕ)}$

Συνεπώς $\mathbf{(ΑΒΓΔ) = ΑΒ \cdot ΑΕ = ΓΔ \cdot ΑΕ}$

Γ4 Εμβαδόν τριγώνου



Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ισούται με το ημιγινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.
Για ένα τρίγωνο με πλευρές α , β , γ

είναι $\mathbf{E = \dfrac{α \cdot υ_α}{2}}$ **ή** $\mathbf{E = \dfrac{β \cdot υ_β}{2}}$ **ή** $\mathbf{E = \dfrac{γ \cdot υ_γ}{2}}$

Απόδειξη

Με πλευρές **ΑΒ** και **ΒΓ** σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΕ**
του οποίου το εμβαδόν είναι $\mathbf{(ΑΒΓΕ) = ΒΓ \cdot ΑΔ = α \cdot υ_α}$

Όμως, τα τρίγωνα **ΑΒΓ** και **ΑΕΓ** είναι ίσα, οπότε $\mathbf{(ΑΒΓ) = (ΑΕΓ)}$

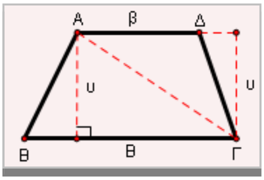
Τέλος, έχουμε ότι $\mathbf{(ΑΒΓΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΕΓ)}$

Οπότε $\mathbf{α \cdot υ_α = 2(ΑΒΓ)}$ ή $\mathbf{(ΑΒΓ) = \dfrac{α \cdot υ_α}{2}}$

Το **εμβαδόν** ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το **ημιγινόμενο** των δύο **καθέτων** πλευρών του.

Να βρείτε το **εμβαδόν** ενός **ορθογωνίου** και **ισοσκελούς** τριγώνου με **υποτείνουσα** μήκους $\mathbf{\sqrt{2}\ cm}$

Γ5 Εμβαδόν τραπεζίου

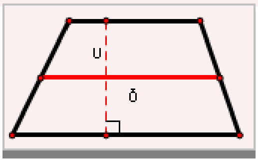


Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.
Για ένα τραπέζιο με βάσεις B, β και ύψος υ

είναι $E = \frac{B+\beta}{2}\cdot\upsilon$

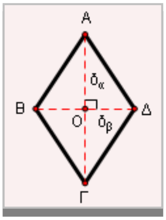
Απόδειξη

Έστω το τραπέζιο $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ (με $\mathbf{B\Gamma \parallel A\Delta}$)
με βάση μεγάλη $\mathbf{B\Gamma = B}$, βάση μικρή $\mathbf{A\Delta = \beta}$ και ύψος $\boldsymbol{\upsilon}$
Φέρνουμε τη διαγώνιο $\mathbf{A\Gamma}$
Είναι $\mathbf{(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma)}$
Επειδή τα τρίγωνα $\mathbf{AB\Gamma}$, $\mathbf{A\Delta\Gamma}$ έχουν το ίδιο ύψος για το εμβαδόν τους
είναι $\mathbf{(AB\Gamma)} = \frac{B\cdot\upsilon}{2}$ και $\mathbf{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\beta\cdot\upsilon}{2}$
Άρα $\mathbf{(AB\Gamma\Delta)} = \frac{B\cdot\upsilon}{2} + \frac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \frac{B+\beta}{2}\cdot\upsilon$



Επίσης, αφού σε κάθε τραπέζιο η **διάμεσός** του ισούται με το **ημιάθροισμα** των **βάσεών** του το εμβαδόν του θα ισούται και με $\mathbf{E = \delta\cdot\upsilon}$

Γ6 Εμβαδόν ρόμβου



Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

Για ένα ρόμβο με διαγώνιους δ_α και δ_β είναι $E = \frac{\delta_\alpha\cdot\delta_\beta}{2}$

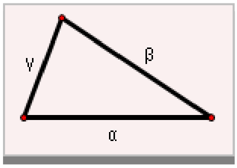
Απόδειξη

Έστω ο ρόμβος $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ με διαγώνιους δ_α και δ_β
Είναι $\mathbf{(AB\Gamma\Delta) = (AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma O\Delta) + (AO\Delta)}$
Όμως, τα τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους, άρα και ισοδύναμα.
Έτσι λοιπόν $\mathbf{(AB\Gamma\Delta) = 4(AOB)}$
Το εμβαδόν του τριγώνου $\mathbf{AOB}$ είναι $\mathbf{(AOB)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta_\alpha}{2}\cdot\frac{\delta_\beta}{2} = \frac{\delta_\alpha\cdot\delta_\beta}{8}$
Άρα $\mathbf{(AB\Gamma\Delta)} = 4\cdot\frac{\delta_\alpha\cdot\delta_\beta}{8} = \frac{\delta_\alpha\cdot\delta_\beta}{2}$

Δ Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Χρησιμοποιώντας τον βασικό τύπο για το εμβαδόν ενός τριγώνου **ΑΒΓ** με μήκη πλευρών **α** , **β** και **γ** προκύπτουν και οι παρακάτω τύποι.

Δ1 Τύπος του Ήρωνα



$$\mathbf{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η **ημιπερίμετρος** του τριγώνου.

Απόδειξη

Επειδή $\upsilon_\alpha = \dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

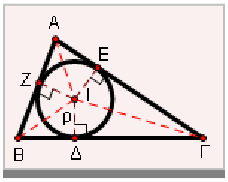
είναι $E = \dfrac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha\cdot\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

Το εμβαδόν ενός **ισόπλευρου** τριγώνου πλευράς **2 cm** είναι

$E = \sqrt{3(3-2)(3-2)(3-2)} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$ αφού $\tau = 3$

Να βρείτε το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές **3 cm** , **5 cm** και **6 cm**

Δ2 Χρησιμοποιώντας την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου



$$\mathbf{E} = \tau\cdot\rho$$

όπου τ η ημιπερίμετρος
και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

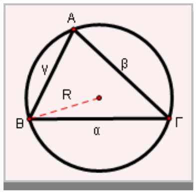
Έστω το τρίγωνο **ΑΒΓ** και ο εγγεγραμμένος κύκλος του **(Ι , ρ)**

Οι διχοτόμοι **ΑΙ** , **ΒΙ** και **ΓΙ** των γωνιών του τριγώνου, χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία τρίγωνα, τα **ΑΙΒ** , **ΒΙΓ** και **ΑΙΓ**
τα οποία δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία αλλά έχουν το ίδιο ύψος **ρ**

Οπότε είναι $(ΑΒΓ) = (ΑΙΒ) + (ΒΙΓ) + (ΑΙΓ) = \dfrac{1}{2}ΑΒ\cdot\rho + \dfrac{1}{2}ΒΓ\cdot\rho\dfrac{1}{2}ΑΓ\cdot\rho$

$$= \frac{1}{2}(ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ)\rho = \frac{1}{2}2\tau\cdot\rho = \tau\cdot\rho$$

Δ3 Χρησιμοποιώντας την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου



$$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$$

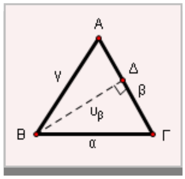
όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

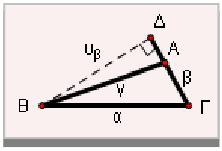
Γνωρίζουμε ότι $\beta\gamma = 2R\upsilon_\alpha$ άρα είναι $\upsilon_\alpha = \dfrac{\beta\gamma}{2R}$

Έχουμε λοιπόν $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha\dfrac{\beta\gamma}{2R} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

Δ4 Τριγωνομετρικός τύπος



$E = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$ ή $E = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$ ή $E = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma$



Η απόδειξη διαφέρει ανάλογα με το είδος του τριγώνου.

Απόδειξη

Αν $\hat{A} < 90^\circ$, στο ορθογώνιο $A\Delta B$ έχουμε $\eta\mu A = \dfrac{\upsilon_\beta}{\gamma}$, δηλαδή $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$

Αν $\hat{A} > 90^\circ$, στο ορθογώνιο $A\Delta B$ έχουμε $\eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \dfrac{\upsilon_\beta}{\gamma}$, δηλαδή $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A_{\varepsilon\xi}$

Επειδή $\hat{A}_{\varepsilon\xi} + \hat{A} = 180^\circ$, είναι $\eta\mu A_{\varepsilon\xi} = \eta\mu A$

Επομένως και στην δεύτερη περίπτωση ισχύει πάλι $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$

Οπότε έχουμε $E = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon_\beta = \dfrac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$

Τέλος αν $\hat{A} = 90^\circ$, θα είναι $\upsilon_\beta = \gamma$ και άρα ο τύπος πάλι ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλοι τύποι.

Σε τρίγωνο με πλευρές 5, 6, 7 και $E = 18$, η ακτίνα του **εγγεγραμμένου** κύκλου είναι ίση με $\rho = 2$, από τον τύπο $E = \tau \cdot \rho$

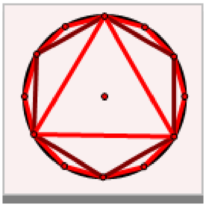
Σε τρίγωνο με πλευρές 2, 3, 4 και $E = 3$ να βρείτε την ακτίνα του **περιγεγραμμένου** κύκλου του.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

3.2 Μέτρηση κύκλου

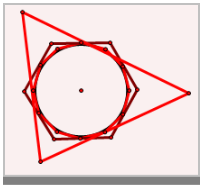
Θεωρία

Α Μήκος κύκλου



Χρησιμοποιώντας την **περίμετρο** των κανονικών πολυγώνων θα **προσεγγίσουμε** την έννοια του **μήκους** του κύκλου.
Θεωρούμε ένα κύκλο (O, R) και εγγράφουμε σε αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό εξάγωνο ένα κανονικό δωδεκάγωνο και γενικότερα ένα κανονικό πολύγωνο με **διπλάσιο** κάθε φορά, **πλήθος πλευρών** από το προηγούμενο.

Καθώς λοιπόν ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου **μεγαλώνει** παρατηρούμε ότι το πολύγωνο τείνει να **ταυτισθεί** με τον **κύκλο**.



Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήγουμε αν αντί για **εγγεγραμμένα** κανονικά πολύγωνα θεωρήσουμε
περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα στον κύκλο (O, R)

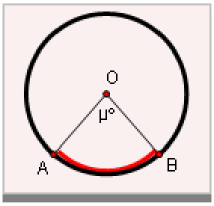
Αποδεικνύεται ότι υπάρχει **μοναδικός** θετικός αριθμός L **μεγαλύτερος** από την περίμετρο P_ν των εγγεγραμμένων πολυγώνων και **μικρότερος** από την περίμετρο P'_ν των περιγεγραμμένων πολυγώνων στον ίδιο κύκλο. Καθώς διπλασιάζουμε τις πλευρές, οι P_ν και P'_ν **προσεγγίζουν** όλο και περισσότερο τον αριθμό L
Ο αριθμός αυτός λοιπόν ονομάζεται **μήκος** του κύκλου (O, R)

Έχει αποδειχθεί ότι ο λόγος $\frac{L}{2R}$ του **μήκους** του κύκλου προς τη **διάμετρό** του είναι **σταθερός**, δηλαδή είναι ίδιος για κάθε κύκλο.
Η σταθερή αυτή τιμή του λόγου συμβολίζεται διεθνώς με το Ελληνικό γράμμα π

Προκύπτει λοιπόν
ότι το μήκος L του κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $L = 2\pi R$

**Να σημειώσουμε ότι ο αριθμός π
είναι ένας άρρητος, υπερβατικός αριθμός και στην πράξη, μια προσέγγισή του είναι $\pi \cong 3{,}14$**

Β📖 Μήκος τόξου



Ένας κύκλος (O, R) είναι ένα τόξο 360^o με μήκος $2\pi R$

Το τόξο 1^o θα έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360}$

οπότε ένα τόξο μ^o θα έχει μήκος $\ell = \frac{\pi R \mu}{180}$

Επίσης ένα τόξο κύκλου με μήκος ίσο με την ακτίνα R
λέγεται **ακτίνιο** (rad), επομένως ένα τόξο α **rad** έχει μήκος αR, δηλαδή $\ell = \alpha R$

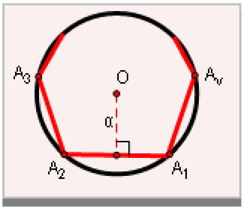
Να θυμηθούμε ότι από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ο τύπος ο οποίος συνδέει τις **μοίρες** με τα **ακτίνια**, δηλαδή $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$

Γ📖 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Κυκλικός δίσκος κέντρου O και ακτίνας R
είναι ο κύκλος (O, R) μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.

Είδαμε προηγουμένως ότι τα **εγγεγραμμένα** ή τα **περιγεγραμμένα** σε έναν κύκλο κανονικά πολύγωνα τείνουν να **ταυτισθούν** με τον κύκλο καθώς το πλήθος των πλευρών τους αυξάνει.
Ο μοναδικός θετικός αριθμός E προς τον οποίο **πλησιάζουν** ολοένα και περισσότερο, τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων λέγεται εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Θεωρούμε ένα κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R)



Το εμβαδόν E_ν δίνεται από τον τύπο $E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu$

Από το διπλανό σχήμα φαίνεται ότι καθώς το πλήθος των πλευρών αυξάνει, το α_ν **προσεγγίζει** την ακτίνα R

και επειδή το P_ν προσεγγίζει το μήκος L του κύκλου, με αντικατάσταση του P_ν και του α_ν στο E_ν έχουμε $E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \cdot \alpha_\nu = \frac{1}{2} L \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$

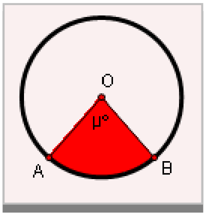
Επομένως
το εμβαδόν E ενός **κυκλικού δίσκου ακτίνας R** δίνεται από τη σχέση $E = \pi R^2$

Δ📖 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Δ1📖 Κυκλικός τομέας

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) και μία **επίκεντρη** γωνία $A\hat{O}B$

Το σύνολο των σημείων της επίκεντρης γωνίας και του κυκλικού δίσκου λέγεται κυκλικός τομέας κέντρου O και ακτίνας R



Ο κυκλικός αυτός τομέας συμβολίζεται $O\overset{\frown}{AB}$

Αν η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι μ^o, λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας είναι μ^o

Ένας κυκλικός δίσκος (O, R) είναι ένα κυκλικός τομέας 360^o με εμβαδόν πR^2

Ο κυκλικός τομέας 1^o θα έχει εμβαδόν $\dfrac{\pi R^2}{360}$

Οπότε, ένας κυκλικός τομέας μ^o θα έχει εμβαδόν $(O\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$

Ακόμη, επειδή ο κυκλικός δίσκος (O, R) είναι κυκλικός τομέας 2π rad με εμβαδόν πR^2, ένας τομέας α rad θα έχει εμβαδόν $\dfrac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$

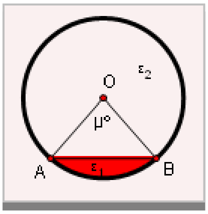
Δ2📖 Κυκλικό τμήμα

Έστω ένας κύκλος (O, R) και μία **χορδή** του AB

Η AB χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη ε_1 και ε_2 που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.

Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται **κυκλικό τμήμα**.

Το **εμβαδόν ε_1** του κυκλικού τμήματος που περιέχεται



στην κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ προκύπτει, αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα **αφαιρέσουμε** το εμβαδόν του τριγώνου, δηλαδή $\varepsilon_1 = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB)$

🔔 Το εμβαδόν ενός **κυκλικού δίσκου** ακτίνας ρ είναι **ίσο** με το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα 90^o και ακτίνας 2ρ

✍ Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός **κυκλικού τομέα** 45^o και ακτίνας $\rho = 1$

Ε📖 Τετραγωνισμός του κύκλου

Η μέτρηση του **εμβαδού** του περικλειόμενου από κάποιο σχήμα ήταν σε όλους τους λαούς, από την εποχή που ακόμη η γεωμετρία ήταν εμπειρικής μορφής βασική επιδίωξη όλων των γεωμετρών.
Από τη στιγμή που διαλέξανε σαν μονάδα μέτρησης των εμβαδών το τετράγωνο με πλευρά τη μονάδα μήκους, αυτόματα τέθηκε και το πρόβλημα του τετραγωνισμού των διαφόρων σχημάτων.

Αρχικά **"τετραγωνίστηκαν"** δηλαδή προσδιορίστηκε το εμβαδόν τους τα **ορθογώνια**, τα **τρίγωνα**, τα **παραλληλόγραμμα** και ορισμένα πολύγωνα. Μετά από αυτό ήταν φυσικό να επιδιωχθεί και ο τετραγωνισμός σχημάτων περικλειόμενων από καμπύλες γραμμές και πρώτου από όλα του κύκλου.

Ο **τετραγωνισμός του κύκλου** λοιπόν, είναι ένα από τα αρχαιότερα γεωμετρικά προβλήματα. Η διατύπωση του είναι απλή. Ζητείται η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν ενός δοθέντος κύκλου.

Η δυσκολία του προβλήματος συνίσταται σε δύο περιορισμούς που έθεσαν σε αυτό οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί.
Πιο συγκεκριμένα, για να θεωρηθεί αποδεκτή μία λύση του προβλήματος σε αυτήν θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μόνο **κανόνας** και **διαβήτης** προκειμένου η απόδειξη να ανάγεται πλήρως στα θεωρήματα του Ευκλείδη και να μην πραγματοποιείται μετά από άπειρο αριθμό βημάτων.

Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου επιλύεται εύκολα αν άρουμε οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο περιορισμούς.

Κατά την Ελληνική αρχαιότητα, δόθηκαν λύσεις στο πρόβλημα από τον Αρχιμήδη τον Νικομήδη, τον Απολλώνιο και τον Κάρπο.

Η επίλυση του προβλήματος συνδέεται άμεσα με την **υπερβατικότητα** του αριθμού π. Αν κάποιος έχει καταφέρει να τετραγωνίσει τον κύκλο, σημαίνει ότι με κάποιο τρόπο έχει υπολογίσει μία συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή για το π Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι εφικτό στην περίπτωση που ο αριθμός π είναι υπερβατικός, οπότε δεν έχει συγκεκριμένη αλγεβρική τιμή.
Πράγματι, το ενδιαφέρον για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου εξανεμίζεται το 1882, όταν ο Ferdinand von Lindemann απέδειξε ότι το **π** είναι **υπερβατικός αριθμός**.